Bolyai Kollégium Levelezős Versenye

1. forduló V. feladat – megoldás

Az egész oldalas körítésben a következő egy sor volt a feladat:

„az lenne a kérdés, hogy ha Akhilleusz állandó sebességgel fut, te pedig nem a földön, hanem a mozgó és nyúló fonálon futsz utána, a fonálhoz képest állandó sebességgel, akkor utol tudod-e érni?”

Értelmezzük: először rögzítsük a vonatkoztatási rendszerünket Akhilleuszhoz, ebben a vonatkoztatási rendszerben a fa a fonál rákötött végével együtt v sebességgel távolodik a nyugvó Akhilleusztól, a végtelenbe és tovább. Legyen a fa a $t = 0$ kezdeti időpillanatban az L helyvektorú pontban ekkor a t időpillanatban az $L + vt$-ben lesz. A Vízipók pedig a fa és Akhilleusz között feszülő fonálon mozog, a kérdés, eléri-e a hőst?
A feladat szövege szerint Vízipók a fonálhoz képest állandó u sebességgel fut. Mekkora akkor a tényleges sebessége? Jelölje $x(t)$ a Vízipók helyvektorát t időpillanatban, ekkor sebessége (mellyel Akhilleuszhoz közeledik):

$$V(t) = u - v\frac{x(t)}{L+vt}$$

Magyarázat: a negatív tag onnan származik, hogy a gonosz fa el próbálja húzni szegény Vízipókot v sebességgel, de mivel a fonál egyenletesen nyúlik, így az $x(t)$ helyen lévő fonalrész már csak $v\frac{x(t)}{L+vt}$ sebességgel távolodik a hőstől, u pedig a Vízipók fonálhoz viszonyított sebessége. Látható, hogy a Vízipók sebessége folyamatosan nő (mivel a $\frac{x(t)}{L+vt}$ arány folyamatosan csökken) (megj.: v, L, u értelemszerűen pozitív)
A feladat megoldásához bevezetünk egy bolhát, ami még lusta is. Ez a bolha a következőket tudja: az elején odaültetjük a Vízipók mellé, ahol Δt ideig lustálkodik, majd feleszmél, és ugrik $u\Delta t$-t Akhilleusz felé. Majd megint lustálkodik Δt ideig, és utána ugrik $u\Delta t$-t Akhilleusz felé. Látható, hogy a lusta bolha végig a Vízipóktól lemaradva mozog (Ha a bolha egy adott lustálkodása kezdetén x pontban volt, akkor egész lustálkodása alatt állandó $v\frac{x}{L+vt}$ sebességgel távolodik. Ehhez hozzávéve az utána következő ugrást, átlagsebessége a lustálkodás + ugrás alatt $u - v\frac{x(t)}{L+vt}$, ami pont a pók sebessége lenne a lustálkodás előtti pillanatban x-ben. De a Vízipók sebessége a Δt időtartam alatt nőtt, így átlagsebessége magasabb a bolháénál, tehát a bolha lemaradt.)
Tehát, ha megmutatjuk, hogy a bolha is eléri Akhilleuszt, azzal megmutattuk, hogy a Vízipók is. Jelölje a bolha helyzetét x_n az n-edik esemény után (esemény: lustálkodás vagy ugrás):

$$x_0 = L,\ x_1 = L + v\Delta t,\ x_2 = L + v\Delta t - u\Delta t ...$$

$$x_{2n+1} = x_{2n} + v\Delta t\frac{x_{2n}}{L+nv\Delta t} = x_{2n}\frac{L+(n+1)v\Delta t}{L+nv\Delta t}$$

$$x_{2n} = x_{2n-1} - u\Delta t$$

A jelölések egyszerűsítése ajánlott: $L_k = L + kv\Delta t$, $V = v\Delta t$, $U = u\Delta t$, újra leírva az előzőeket:

$$x_0 = L_0,\ x_1 = L + V,\ x_2 = L + V - U ...$$

$$x_{2n+1} = x_{2n} + V\frac{x_{2n}}{L_n} = x_{2n}\frac{L_{n+1}}{L_n}$$

$$x_{2n} = x_{2n-1} - U$$

Írjuk fel az első néhány tagot:

$$x_0 = L_0$$

$$x_1 = L_0 \frac{L_1}{L_0}$$

$$x_2 = L_0 \frac{L_1}{L_0} - U$$

$$x_3 = (L_0 \frac{L_1}{L_0} - U)\frac{L_2}{L_1} = L_0 \frac{L_2}{L_0} - U \frac{L_2}{L_1}$$

$$x_4 = L_0 \frac{L_2}{L_0} - U \frac{L_2}{L_1} - U$$

$$x_5 = L_0 \frac{L_3}{L_0} - U \frac{L_3}{L_1} - U \frac{L_3}{L_2}$$

Vegyük észre, hogy:

$$x_{2n+1} = L_{n+1}(1 - U \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i})$$

Ez teljes indukcióval igazolható:
Kezderi feltétel: $n = 1$-re igaz.
Indukciós lépés:

$$x_{2n+1} = L_{n+1}(1 - U \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i})$$

$$x_{2(n+1)} = x_{2n+1} - U = L_{n+1}(1 - U \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i}) - U$$

$$x_{2(n+1)+1} = x_{2(n+1)} \frac{L_{n+2}}{L_{n+1}} = (L_{n+1}(1 - U \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i}) - U)\frac{L_{n+2}}{L_{n+1}} = L_{n+2}(1 - U \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i}) - U \frac{L_{n+2}}{L_{n+1}}$$

$$x_{2(n+1)+1} = L_{n+2}(1 - U \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i} - U \frac{1}{L_{n+1}}) = L_{n+2}(1 - U \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{L_i})$$

Ez azért jó, mert ha $(1 - U \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i}) \leqq 0$, az azt jelenti, hogy a bolha (és így a Vízipók) elérte Akhilleuszt.

$$\left((1 - U \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i}) \leqq 0\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{U} \leqq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i}\right)$$

Emlékezzünk vissza, hogy $L_k = L + kv\Delta t$ egy pozitív valósakban haladó számtani sorozat, így $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{L_i}$ minden határon túlnő, tehát létezik olyan n, amelyre a feltétel teljesül, és így a Vízipók el kell érje Akhilleuszt, akkor is, ha sétál.

Felmerül a probléma: pontosan mikor éri utól? A feladatnak nem volt része ennek megválaszolása, de a teljesség kedvéért ez a következőképpen számolható (magasabb ismereteket használva):

Jelülések ugyanazok, $x(t)$ a pók hely-idő függvénye, ennek idő szerinti első deriváltja a sebessége (bolha nincs). Ekkor felírható a

$$\frac{dx}{dt} = v \frac{x}{L + vt} - u$$

differenciálegyenlet, ami sajnos nem szeparábilis, de bevezetve a $h = \frac{x}{L+vt}$ segédváltozót (minket úgyis csak az $x = 0$ érdekel, ami ekvivalens $h = 0$-val):

$$\frac{dh}{dt} = (v\frac{x}{L+vt} - u)\frac{1}{L+vt} - \frac{vx}{(L+vt)^2} = -\frac{u}{L+vt}$$

már szeparábilis, szeparálva a változókat:

$$dh = -\frac{u}{L+vt}dt$$

integrálva a két oldalt:

$$h + c = -\frac{u}{v}ln(L+vt)$$

felhasználva, hogy $h(0) = \frac{L}{L} = 1$

$$c = -\frac{u}{v}ln(L) - 1$$

$$h = 1 + \frac{u}{v}ln(L) - \frac{u}{v}ln(L+vt)$$

$$h = 1 + \frac{u}{v}ln(\frac{L}{L+vt})$$

amiből:

$$x = h(L+vt) = (1 + \frac{u}{v}ln(\frac{L}{L+vt}))(L+vt)$$

Innen már kiszámolhatjuk, hogy mikor ér a pók a 0-ba (ha odaér egyáltalán, bár azt már egyszer kiszámoltuk):

$$(1 + \frac{u}{v}ln(\frac{L}{L+vt}))(L+vt) = 0$$

$$1 + \frac{u}{v}ln(\frac{L}{L+vt}) = 0$$

$$ln(\frac{L+vt}{L}) = \frac{u}{v}$$

$$vt = (e^{\frac{u}{v}} - 1)L$$

$$t = \frac{(e^{\frac{u}{v}} - 1)L}{v}$$

Tehát ennyi idő alatt éri utól Akhilleuszt.