

# Az ELTE Bolyai Kollégiumának Levelezős Csapatversenye, 2. forduló

beküldési határidő: 2021. május 20.

A megoldásokat e-mailben kell beküldeni a [levelezosverseny.bolyai@gmail.com](mailto:levelezosverseny.bolyai@gmail.com) címre. Amennyiben lehetséges, javasoljuk a megoldások gépelve leírását, de elfogadunk (olvashatóan) kézzel írt és beszkenelt megoldásokat is. Mind a hat témakörben összesen ugyanannyi pontot lehet szerezni.

*A csillagkapun belépve egy erős villanást tapasztaltok, melynek hatására egy ideig nem láttok jól, de egy ismerős hang hatására mégis nyugodtabbak lesztek. A messzi rendszerekben hírbelt Jedi mester üdvözöl titeket, és nincs egyedül. Spock-ot társai nyugtatgatják, hazaérkezett. Amint visszanyeritek a látásotokat, feltűnik nektek, hogy a híd vörös fényben úszik, ugyanis vészhelyzet van. A hajó egy hamarosan kitörő vulkán lábánál található. Ahhoz, hogy meg tudjátok mondani mennyi időtök van még ott hátra és miért is veszélyes a kitörő földrajzi képződmény mellett tartózkodni, ismernetek kell a vulkánok működését.*

# 1. FELADAT

Az Enterprise legénységének kutatói már felmérték a helyszínt, és az alábbi megállapításokat tették. Milyen vulkántípusra igazak az állítások? (2 pont)

Megjegyzés: Az ismeretlen bolygó tekinthető egy Földhöz hasonló bolygónak, így meg tudjátok oldani a földi vulkanizmusra vonatkozó kérdéseket

1. A lávája sűrűbben folyik
2. Heves törmelékszórással jár együtt
3. Közeledő kőzetlemezekre jellemző
4. Fémeselegyrészekben (pl. magnézium, vas) gazdag, SiO<sub>2</sub>-ban viszont szegényebb.
5. Az itteni kőzetek világosabb színűek

Ezek alapján melyik átalatok ismert vulkánra hasonlíthat ez a vulkán? (2 pont)

- Mauna Loa
- Kolumbo
- Parícutin
- Fuji

Észreveszitek, hogy van benne egy elírás, az egyik állítás nem lehet igaz erre a típusú vulkanizmusra. Melyik ez az állítás, és ez milyen vulkánosságra vonatkozik? (2+2 pont)

Spock elismerően néz rátok. Nem gondolta, hogy ekkora tudásotok van a vulkánokról. Hogy még inkább lenyűgözzétek, a légköri ismereteiteket is be szeretnétek vetni. Milyen felhő képződik gyakran vulkánkitörés következményeként? (2 pont)

Azonban valami nem stimmel, ugyanis ebből a felhőtípusból nem képződik csapadék, azonban többször előfordult már, hogy vulkánkitörések után valami furcsa csapadék hullott az égből, ez mivel magyarázható? (4 pont)

Látjátok, hogy ezekkel a válaszokkal kezditek elnyerni az Enterprise első tisztjének megbecsülését. De persze Spock-kal nincs ilyen egyszerű dolgok, egy fogós kérdést tesz fel nektek: Mivel magyarázható, hogy egy vulkánkitörés során, bár forró láva áramlik a felszínre, összességében a bolygó hőmérséklete mégis leül? (4 pont)

Miközben bájosan társalogtok a természet és a tudomány szépségeiről, azt veszitek észre, hogy az egyik társatok egyre feszültebb. Amikor megkérdezitek mi aggasztja, ezt válaszolja:

"Hallottam már arról, hogy a vulkánkitörést követően több száz fokos hőmérsékletű, magas hőmérsékletű gázokból, izzó kőzetblokkokból és vulkáni hamuanyag keverékéből álló kitörési felhő akár 100 km/óra sebességet meghaladva zúdul le a vulkán oldalán, és ez rendkívül veszélyes. Ez a(z)... a(z)..."

Segítsétek ki a társatokat, mi ez a folyamat/jelenség, amiről beszél? (2 pont)

## 2. FELADAT

Most, hogy tisztában vagytok a veszélyekkel, rájöttök, hogy ideje sürgősen elhagyni a helyszínt. Ehhez azonban rendbe kell hozni a hajó hajtóművét. Egy előzetes sérülés óta viszont rosszul kerül adagolásra az egyik összetevő, az ecetsav az üzemanyagba. Ahhoz, hogy újra megfelelő recept szerint működhessen a hajó motorja, a fedélzeti számítógéppel meg kell becsülni az ecetsav disszociációjának mértékét. Nagyon meglepődtek, amikor szögfüggvényekkel találjátok szembe magatokat. A számítógép a disszociáció fokot ( $\alpha$ ) a következő egyenletből kívánta meghatározni:

$$\frac{1}{k}(\arctan(k(x - x_0)) + \pi) = \alpha$$

Minek feleltethető meg az egyenletben  $x$  és  $x_0$ ? (2 pont) Segítségnek tekintsük az inflexiós pont helyzetét egy  $\alpha - pH$  grafikonon.

Az egyenletben meg kell határoznunk  $k$ -t is ahhoz, hogy használni tudjuk. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a jól ismert pufferképletből kifejezzük  $\alpha$ -t és behelyettesítjük az egyenletbe. Legyen  $(x - x_0) = d$ . Tekintsük  $k$ -t  $d$ -re első rendű függvénynek. Számítsuk ki  $k$ -t  $d = 0.2$ -re,  $0.3$ -ra,  $0.4$ -re,  $0.5$ -re és  $0.6$ -ra. (együtt 2 pont) Az eredmények alapján adjuk meg  $k$ -t és  $\alpha$ -t  $d$  függvényeként! (6 pont) Használjunk segítséggént WolframAlpha-t.

Számítsuk ki az ecetsav disszociációfokát  $pH = 5.06$ -on mindkét módszerrel. (5 pont) Mekkora eltérés adódik? (1 pont) Mi a feltétele annak, hogy a felállított modellünk közel lesz a hagyományosan számítható értékhez? (2 pont) Mennyi  $k$  értéke az inflexiós pontban határfeltétel szerint és az illesztés szerint? (2 pont)

Az előttek álló akadály megoldása után sikeresen felszálltok a bolygó felszínéről, és pályára álltok körülötte. Végre egy kis nyugalom, amikor mindenki megbeszélheti az eddig történeteket. Luke arról számol be, hogy zavart érzett az Erőben, ezért a furcsa érzést követve jutott el a Zeffo bolygóra. Az a planéta egyébként is egy titokzatos és különös hely, hiszen régen egy Erőhasználó faj élt ott, rengeteg bölcs és nagyhatalmú képviselővel. Luke az egyik ősi templom hatalmas csarnokában érezte egy óriási, gépszerű entitás jelenlétét és hívogató szavait. R2D2-val egy sosem látott, írásokkal tarkított utazásra alkalmas kaput találtak ott. A kis robot megállapította, hogy a kapu egyre több energiát használ fel, és ezzel párhuzamosan a környező rendszerekben egyre több kisebb-nagyobb féreglyuk nyílik meg. Az órákon át tartó üzemelése során a kaput nem tudták lekapcsolni, és R2D2 idegen, sosem látott hajók megjelenését regisztrálta a környéken, és közvetlenül a fejük felett egy úrcsata is kibontakozni látszott. Innentől kezdve Kirk és legénysége vették át a szót, akik elmagyarázták, hogy egy expedíció során a semmiből tűnt fel előttük egy őket is beszippantó féregjárat, és ezért az említett Zeffo bolygó felett találták magukat. Sajnos nem egyedül, hiszen Klingonok is voltak velük, akikkel harcba bocsátkoztak. A túlerővel szemben a bolygó felszínére menekültek, pont a kapuhoz, mivel a magas energiaszintre azt hitték egy erődítmény várja őket, ahonnan segítséget kérhetnek. A kényszerleszállás után a hajóból kimenekülve Luke fogadta őket. Spock felismerte, hogy a furcsa szerkezetnek köze lehet az egész örültséghez, ezért gyorsan odafutott segíteni, míg Luke a földet érő Klingon csapatokkal harcolt. Sikeresen legyőzték a Klingonokat, ezután pedig Luke, Spock és R2D2 igyekeztek leállítani a gépet, ám az "felrobbant". Ebben a pillanatban a csapat tagjai a galaxis különböző területére teleportálódtak. Spock a kapuval egy barlangba, R2D2 a Tatooinera, Luke és az Enterprise legénysége erre a vulkanikus bolygóra.

Luke érzi még a nagy Entitás jelenlétét a Zeffo egykori helyén, a hajó szenzorai pedig egy szingularitást azon a területen. Eddig nem tudtak odamenni, de most, hogy megérkeztetek a csillagkapu segítségével és segítettek rendbehozni a hajót, útnak indulhattok. A helyszínen valószínűleg további harcok várnak rátok, de sajnos nem lehet úgy csatározni, hogy a mesterséges gravitációs erőter még nem működik. A megjavításához újra át kellene venni, mit tudtok a gravitációról, ehhez pedig tökéletes lesz a következő pár kérdés.

### 3. FELADAT

Az Enterprise űrhajó tervezői komoly erőfeszítéseket tettek a leendő utasok kényelméért. Mi sem kellemetlenebb, mint hónapokon keresztül a súlytalanság állapotában tengődni – ezért mesterségesen kell a földihez hasonló "gravitációs" gyorsulást létrehozni. Ezt a legtöbb űrhajó a forgásából adódó centrifugális erővel oldja meg, ám az Enterprise ennél sokkal kifinomultabb. Mint azt a *Star Trek TNG Technical Manual* c. útmutatóban is olvashatjuk, az űrhajó apró gravitáció-generátorokkal van felszerelve, melyek gravitonok kibocsátásával hozzák létre a kívánt gravitációs teret, a Halálcsillagon is fellelhető vonónyalábhoz hasonló technikával.

Sajnos a gravitonok fizikájával nem foglalkozunk, de megvizsgáljuk azt az izgalmas lehetőséget, ha a gravitációs teret egy mini feketelyukkal helyettesítik, ami természetesen nem szippantja magába az egész űrhajót. A mi világunkban ez kevésbé reális, de az AranySzív Űrhajó Végtelen Valószínűség Generátora segítségével igazából minden (is) megtörténhet!

A mai napig nem tudjuk pontosan, hogy mi zajlik a feketelyukak belsejében, de a Tejútrendszer közepén elhelyezkedő szupermasszív feketelyukat már elkezdjük kiismerni: tőlünk 8,18 kpc-re (kiloparszek) helyezkedik el, és körülötte számos csillag kering. Az a csillag, amelyet hozzá legközelebb láttunk merészkedni, 16 (földi) éves periódussal kering a monstnum körül, pályájának félnagy tengelyét 0,13" alatt látjuk.

Ne feledjük, hogy Kepler III. törvénye minden égitestre teljesül, de annak általános formáját kell használnunk, melyben szerepel a vonzócentrum tömege is. A csillag tömege a feketelyukéhoz képest elhanyagolható.

Egy feketelyuk Schwarzschild-rádiuszát, azaz azt a határt, ahonnan a fény se szökhet már meg, az alábbi képlet adja meg:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2},$$

ahol  $G$  az univerzális gravitációs állandó,  $M$  a feketelyuk tömege,  $c$  pedig a fénysebesség. Vegyük úgy, hogy a feketelyuk összes tömege ezen rádiuson belül egyenletesen helyezkedik el, így átlagsűrűséget számolhatunk.

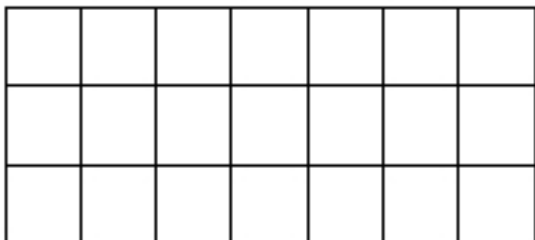
Feladataid:

- Mekkora tömegű mini-feketelyuk kellene ahhoz, hogy 1 m-rel az utasok lába alatt elhelyezve a lábuknál éppen a földi  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  gyorsulást érezzék? Milyen effektus okozna rendkívüli kellemetlenséget egy magas ember esetén egy feketelyuk keltette gravitációs térben?  
Tegyük fel, hogy ezt egy tömegpont fejt ki, és az utasok éppen felette állnak. (3 pont)
- Mekkora (Schwarzschild-) átmérőjű lenne egy ilyen szerkezet, ha az egy feketelyuk "anyagából" lenne? (2 pont)
- Mekkora a Tejútrendszer középponti feketelyukának tömege?  
Mekkora sebességgel mozognak körülötte a Nap (körpályát feltételezve), ha a Tejútrendszer többi anyaga elhanyagolható lenne?  
Ezt hasonlítsuk össze irodalmi adattal, és adjunk arra becslést, hogy a feketelyuk tömegének hányszorosát foglalja magában a Tejútrendszer a nappályán belül (ne feledjük, ebbe a sötét anyag is beleszámít)! (9 pont)
- Az Enterprise elindult a Föld gravitációs teréből éppen a II. kozmikus sebességgel (ez a végtelenben 0 sebességű pályához tartozó kezdeti sebesség, energiamegmaradásból számoljuk ki az értékét, ne nézzük azt ki az internetből). Azonban nem sokkal ezután (még közelítőleg ezzel a sebességgel mozgott) elhagyta a mini feketelyukat. Ez mennyire gyorsítja fel az enélkül 42 000 tonnás űrhajót? Számolhatunk nemrelativisztikusan? (6 pont)

A gravitációs erőter újra működik, fél napi útra vagytok. Nem akartok unatkozni, ezért Spock felajánlja, hogy ad nektek egy kis matekos feladványt, mert kíváncsi, vajon képesek vagytok-e megoldani azt?

## 4. FELADAT

- Adottak  $n$  és  $k$  pozitív egészek,  $n > k$ . Egy  $n \times k$  egység méretű (tehát  $n$  egység széles és  $k$  egység magas) falszakaszból levettük az azt borító  $1 \times 1$ -es csempéket. (Az ábrán egy  $7 \times 3$ -as falszakasz látható.)



Minden csempe helyére szeretnénk beírni egy egyjegyű természetes számot úgy, hogy a számok összege minden oszlopban páratlan és minden sorban páros. Megtehetjük-e ezt, ha

- (a)  $n$  páros,  $k$  páratlan? (1 pont)
  - (b)  $n$  és  $k$  is páros? (2 pont)
  - (c)  $n$  páratlan,  $k$  páros? (3 pont)
  - (d)  $n$  és  $k$  is páratlan? (4 pont)
- Az előbbi téglalapot akarjuk hézagok és átfedések nélkül lefedni  $n$  darab  $1 \times k$  egység méretű csempékkel ("álló" és "fekvő" téglalapokat is lehet használni).
    - (e) Hányféleképpen tehető ez meg, ha speciálisan  $k = 2$  (és  $n$  paraméter)? (3 pont)
    - (f) Hányféleképpen tehető ez meg, ha speciálisan  $k = 3$  (és  $n$  paraméter)? (3 pont)
    - (g) Hányféleképpen tehető ez meg, ha általában  $k$  és  $n$  paraméter? (4 pont)

Sikeresen elütitek az időt és megérkeztek a Zeffo egykori helyére. Egy hatalmas tátongó nyílást láttok az űrben, a közepén egy monumentális állomással. Mint kiderül, az állomáson nincs egy élőlény sem, csak egy magát Bölcs Elmének nevező szuperszámítógép, aki rádióhíváson keresztül mutatkozik be a legénységnek és kér titeket illedelmesen, hogy húzzanak el innen, mert kísérletet folytat. Elmagyarazza, hogy építésének célja az élet értelmének kiderítése volt, melyre azt a választ találta, hogy 42. Mindez nem tetszett neki, ezért más, párhuzamos univerzumokat is be akart vonni az évmillióig tartó vizsgálatába. Így a mintaszám növelése érdekében két másik világot ugrasztott össze a sajátjával, hogy információt gyűjthessen. Felhívjátok rá a figyelmét, hogy ez nem túl illendő dolog, hiszen tönkreteszi az Enterprise legénységének, valamint Luke és a Ti világotok integritását vele, de ez őt nem érdekli. Mivel nem juttok egyezsége, úgy döntötök, hogy megtámadva a robotokkal védett állomást személyesen járultok a szuperszámítógép elé.

Elkezdődnek a harcok, Luke és a legénység nagy része feltartja a robotokat, amíg ti megtaláljátok, hogy pontosan hol van a Bölcs Elme az állomáson belül. Ez meg is történik, így a Spock-al kiegészült csapatotok megpróbál bejutni oda. Egy jól elzárt teremről van szó, melyet nem lehet csak úgy megközelíteni. Egy biometrikus rendszer védi, csak azon egyének juthatnak be, akik millió évvel ezelőtt megépítették a szuperszámítógépet. El kell hitetnetek védelmi rendszerrel, hogy ugyanaz a DNS-etek, mint az egykori tervezőknek. Ehhez nem csak biológiai, de informatikai szempontból is át kell jutnotok a tűzfalon, hogy hozzáférjete az Alkotók kodonszótárához.

## 5. FELADAT

Lássuk először az informatikai akadályt.

### FELADAT1 (7 pont)

Ahhoz, hogy áttörést érjete el a számítógép "pajzsán", egészítsétek ki a lent látható algoritmust úgy, hogy a futás végén az "A" nevű tömb elemei növekvő sorban legyenek! Kiegészítéseket csak a 3 (a,b,c) jelölt (####) helyen lehet megtenni. Minden kiegészítés legfeljebb 1 kifejezés/utasítás lehet.

[REDACTED]rendezés (A : Egész[n])

Csináld $i:=2$ -től $n$ -ig	
Ha $A[i-1] > A[i]$	
IGAZ	HAMIS
$x := A[i]$	#####c
$A[i] := A[i-1]$	
$j := i-2$	
Csináld #####a	
$A[j+1] := A[j]$	
$j := j-1$	
#####b	

Megjegyzések: Az "A" tömböt 1-es számtól indexeljük. A tömb elemeire értelmezhetőek a  $<$ ,  $=$ ,  $>$  műveletek, a tömb monoton növekvő ha  $A[i] \leq A[i+1]$ . A ciklus nem futhat végtelen ideig. (2+2+2pont)

Melyik ismert rendezésnek felel meg a megoldás a kiegészítésekkel? (1 pont)

### FELADAT2 (13 pont)

Általánosságban nézve a különböző matematikai operátorokat úgy használjuk, hogy az operátor előtt és mögött található egy-egy kifejezés, majd ennek a két kifejezésnek a függvényében az operátor egy eredménnyel(értékkel) tér vissza. Vegyük például a " $a + b$ " kifejezést. Tegyük fel hogy az " $a$ " és " $b$ " kifejezések rendre a 3 és 4 számértékeket jelölik, amiken értelmezve az összeadás műveletét a 7-es számértéket kapjuk. Tehát az " $a + b$ " kifejezés értéke 7.

A számítógépek nehezen kezelik a normál operátorokkal való számolást, a következőkben leírt módon viszont könnyen. Mostantól tekintsetek az operátorokra mint 2 ismeretlenes függvényekre, amiknek az ismeretlenjeit az operátor jel mögé kell írni. Tehát az előzőekben használt példában az " $a + b$ " kifejezés helyett írjunk " $+ab$ "-t, vagy " $c/d$ " helyett írjunk " $/cd$ "-t, " $e + f + g$ " helyett írjunk " $++efg$ "-t. Amennyiben ilyen formában írjuk fel a matematikai kifejezéseinket, elhagyhatjuk a zárójeleket is, mert nincs rájuk szükség: " $* + abc$ " egyértelműen kibomlik az " $(a + b) * c$ " kifejezésekre, míg az " $+ * abc$ " kifejezés az " $(a * b) + c$ "-t takarja. (Segítségként magyarul a "Jan Łukasiewicz-féle lengyel jelölés", angolul "Polish notation" néven lehet rákeresni a módszerre.)

Írjátok át a következő kifejezéseket ebbe az új formába!

1.  $a - b + c$  (1 pont)
2.  $a * (b - c)^d - e/f$  (3 pont)
3.  $(a + b + c)/((d - e) * f + g)$  (3 pont)

Írjátok át a következő kifejezéseket normál formába!

4.  $^+a * bc / - def$  (3 pont)
5.  $^a^+bc // def$  (3 pont)

Megjegyzés: a " $^$ " művelet a hatványozást jelenti, ahol " $x^y$ " " $x$  az  $y$ -adikon"-t jelent.

## 6. FELADAT

Most, hogy a rendszer mesterei lettetek, és megkaptátok az alkotók kodonszótárát (lásd alább a képen), ideje ez alapján teljesen feltörni a biometrikus védelmet. A következő betűsor egy DNS aktív (templát) szálának bázissorrendje. Adjátok meg a róla átíródó mRNS kódját, illetve a peptidet, amit kódol! Használjátok a kodonszótárát! (2p+3p részpont **nem adható**)

*TACCCTCGAGGTTTCGATC*

		Second base of codon				
		U	C	A	G	
First base of codon	U	UUU	UCU	UAU	UGU	Third base of codon
		UUC	UCC	UAC	UGC	
		UUA	UCA	UAA	UGA	
		UUG	UCG	UAG	UGG	
		Phenylalanine phe	Serine ser	Tyrosine tyr	Cysteine cys	U
		Leucine leu		STOP codon	STOP codon	C
					Tryptophan trp	A
						G
C	CUU	CCU	CAU	CGU	U	
	CUC	CCC	CAC	CGC	C	
	CUA	CCA	CAA	CGA	A	
	CUG	CCG	CAG	CGG	G	
		Leucine leu	Proline pro	Histidine his	Arginine arg	
				Glutamine gin		
A	AUU	ACU	AAU	AGU	U	
	AUC	ACC	AAC	AGC	C	
	AUA	ACA	AAA	AGA	A	
	AUG	ACG	AAG	AGG	G	
		Isoleucine ile	Threonine thr	Asparagine asn	Serine ser	
		Methionine met (start codon)		Lysine lys	Arginine arg	
G	GUU	GCU	GAU	GGU	U	
	GUC	GCC	GAC	GGC	C	
	GUA	GCA	GAA	GGA	A	
	GUG	GCG	GAG	GGG	G	
		Valine val	Alanine ala	Aspartic acid asp	Glycine gly	
				Glutamic acid glu		

© Clinical Tools, Inc.

- A kódolt aminosavak közül melyik (betűsorban szereplő) kodonja áll csupa purinbázisból? (3p)
- Melyiknek az antikodonja CGA? (3p)
- Milyen antikodonú tRNS fog kapcsolódni a negyedik aminosav kodonját követő bázishármashoz? (3p)
- A fenti szálon mely aminosav(ak) mRNS-kodonja marad változatlan értelmű, ha benne az U-t C-re cseréljük? (3p)
- Melyik sejtalkotó "olvassa le" az mRNS-kódokat? (3p)

A rendszert sikeresen feltörve szemtől szemben találjátok magatokat a Bölcs Elmével, akinek kitarátásokat látva van egy ajánlata a számotokra. Ha sikeresen megoldjátok a mindent elDÖNTŐ feladatokat, akkor megmenthetitek világotokat.