Bolyai Kollégium Levelezős Versenye

2. forduló V. feladat – megoldás

Az alábbiakban a gördülési ellenállást és légellenállást elhanyagoljuk mint ahogyan azt a feladat szövegében megadtuk. Összefoglalva egy átlagos indoklást, az első esetben a kő sorban hagyja el a gerendákat (gurul túl rajtuk), ezzel energiát veszít, de a sebessége nem csökken, mikor egy addig alatta levő gerendát elhagy. A sebessége csak akkor csökken, mikor elér egy újabb, addig álló gerendát, de egy ilyen „ütközésnél" sem fog nullára csökkenni. Ez a sebesség nem fog változni, amíg újra el nem ér egy gerendát, ahol ugyan újból csökken, de nem lesz nulla. Tehát mindig egyre lassabban, de el fog tudni döcögni a következő gerendához, és így minden gerendát elér előbb-utóbb, soha nem áll meg (az idealizált világképek előnyei). A második esetben viszont a gerenda súlypontja nem marad végig egy magasságban, és magasabban lesz, mikor kigurul a kő alól, mint mikor a kő beért fölé (hacsaknem a kő hossza a Reuleux-háromszög hosszának a harmadának az egész számú többszöröse, de nem úgy lett megadva, így ez lényegében az egyetlen releváns adat). Ezzel a kő energiát veszít. Viszont, az első esettel ellentétben, ahol az elvesztett energia mennyisége függött a sebességtől, ez mindig legalább egy adott fix érték, tehát csak véges sok gerendán tud átjutni a kő.

Pár egyenlet, amik valamennyire számszerűsítik a fenti mesét (jó mese esetén nem hiányoltuk őket, de hibás szöveges indoklás mellett részpontokat értek): Mikor a kőtömb v sebességgel halad, az alatta levő gerendák tömegközéppontja $\frac{1}{2}v$ sebességgel halad, miközben a gerendák $\frac{v}{d\pi}$ szögsebességgel forognak a középpontjuk körül. Ekkor az egész rendszer energiája:

$$E = \frac{1}{2}m_{kő}v^2 + n\left(\frac{1}{2}m_{gerenda}\left(\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2}\theta_{gerenda}\left(\frac{v}{d\pi}\right)^2\right)$$

ahol n a kő alatti gerendák száma, és $\theta_{gerenda} = \frac{1}{2}m_{gerenda}\left(\frac{d}{2}\right)^2$ egy gerenda tehetetlenségi nyomatéka.

$$E = \frac{1}{2}m_{kő}v^2 + n\left(\frac{1}{8}m_{gerenda}v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_{gerenda}\left(\frac{d}{2}\right)^2\left(\frac{v}{d\pi}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m_{kő}v^2 + n\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16\pi^2}\right)m_{gerenda}v^2$$

Felhasználva, hogy $m_{kő} = 1000m_{gerenda}$:

$$E = 500m_{gerenda}v^2 + n\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16\pi^2}\right)m_{gerenda}v^2 = \left(500 + \frac{2\pi^2+1}{16\pi^2}n\right)m_{gerenda}v^2$$

A rendszer lendülete: $I = (1000+n)\,m_{gerenda}v$
A kő alatti gerendák száma n vagy 50, vagy 51.
Mikor egy gerenda fölött elgurul a kő, a rendszer energiája és impulzusa csökken, (rendszer alatt mindig a követ és az őt éppen érintő gerendákat értve), pontosan az egy darab elhagyott gerenda mozgási és forgási energiájával, és n 51-ről 50-re változik. Mikor egy újabb gerendához érkezik a kő, n 50-ről 51-re változik, de mennyi lesz a rendszer új közös sebessége?
Az egyszerűség kedvéért most tekintsünk el attól, hogy súrlódás mint külső erő hathatna a rendszerre, és közelítsünk lendületmegmaradással:

$$(1000+50)\,m_{gerenda}v_1 = (1000+51)\,m_{gerenda}v_2$$

$$v_2 = \frac{1050}{1051}v_1$$

Tehát a sebesség mértani sor szerint csökken, sosem lesz nulla.
Ha ellenben nem lendületmegmaradással számolunk, hanem feltesszük, hogy a gerendák nem csúsznak meg:
Vizsgáljuk meg külön, mi történik, ha egy gerendára a legfelső pontjában vízszintesen előre F erővel hatunk! A gerendára vízszintes irányban hathat még az S súrlódási erő, az ábra szerint. Feltéve, hogy a gerenda nem csúszik meg, a sebességének és szögsebességének pillanatnyi megváltozására felírható:

$$(F-S)\,\Delta t = m_{gerenda}\Delta v$$

$$(F+S)\,\frac{d}{2}\Delta t = \theta\omega = \frac{1}{2}m_{gerenda}\left(\frac{d}{2}\right)^2\frac{\Delta v}{d\pi} = \frac{1}{8\pi}m_{gerenda}\Delta v d$$

$$(F+S)\,\Delta t = \frac{1}{4\pi}m_{gerenda}\Delta v$$

Ebből a három egyenletből az elsőnek és a harmadiknak az összegét és a különbségét egymással elosztva megkaphatjuk az $\frac{F}{S}$ arányt:

$$\frac{F}{S} = \frac{\frac{1}{4\pi}+1}{\frac{1}{4\pi}-1} = -\frac{4\pi+1}{4\pi-1}$$

Vagyis S is előre mutat, azaz „a föld gyorsítja a hengert” ! (Ezt el lehet játszani egy orsó cérnával is, amit az asztalon húzgálunk a lelógó szálnál fogva, amennyiben valakinek ez nagyon furának tűnik)